

LUÍS EDUARDO SARTORI PIVATTO

5947707

**ALGORITMO PARA DETERMINAR A POSIÇÃO ÓTIMA DE ELETRODOS EM
TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA**

SÃO PAULO

2011

LUÍS EDUARDO SARTORI PIVATTO

**ALGORITMO PARA DETERMINAR A POSIÇÃO ÓTIMA DE ELETRODOS EM
TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA**

**Trabalho de formatura apresentado Escola
Politécnica Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de
Graduação em Engenharia.**

**Área de concentração:
Engenharia Biomecânica**

**Orientador:
Prof. Dr. Raul Gonzalez Lima**

SÃO PAULO

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Pivatto, Luis Eduardo Sartori

Algoritmo para determinar a posição ótima de eletrodos em tomografia por impedância elétrica / L.E.S. Pivatto. – São Paulo, 2011.

p.58

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Algoritmos para imagens 2.Tomografia por Impedância Elétrica 3. Otimização 4. Método dos elementos finitos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Raul Gonzalez Lima por me explicar desde as coisas mais simples sem perder a paciência e a serenidade; por sua perícia em designar as coisas mais complexas da maneira mais óbvia; por me ajudar a visualizar o todo através de passos específicos.

Agradeço ao Olavo Luppi Silva por sua prontidão em tirar minhas dúvidas.

Agradeço ao Fernando Silva de Moura por me provar que a diagonal da matriz Σ na decomposição USV não muda com a transposta.

Agradeço ao Luís Mello pela prontidão e atenção dispensados para analisar o trabalho, bem como por me explicar pontos importantes que eu mesmo havia despercebido.

Agradeço à minha mãe, sem a qual nunca teria conseguido fazer qualquer coisa, não apenas no âmbito acadêmico, mas em qualquer outro.

*"Elogiar-te-ei porque fui feito maravilhosamente, dum modo atemorizante.
Teus trabalhos são maravilhosos,
De que minha alma está bem apercebida."*

Salmos 139:14

SUMÁRIO

<i>FICHA CATALOGRÁFICA</i>	3
<i>Agradecimentos</i>	4
<i>Sumário</i>	6
<i>Resumo</i>	7
<i>Abstract</i>	8
<i>Lista de Símbolos</i>	9
<i>Introdução</i>	11
1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
2 PROBLEMA DIRETO.....	15
2.1 MODELO MATEMÁTICO DA TIE	15
2.1.1 <i>Domínio</i>	15
2.1.2 <i>Padrões de Injeção de Corrente</i>	16
2.2 CONSTRUINDO UMA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA TIE.....	18
3 ALGORITMO DE REGULARIZAÇÃO PARA O PROBLEMA INVERSO	23
3.1 ALGORITMO DO PROBLEMA INVERSO PARA POSIÇÃO DE ELETRODOS	24
3.1.1 <i>Determinação de B</i>	27
3.2 FLUXOGRAMA DO ALGORITMO CAIXA PRETA	29
.....	29
4 DECOMPOSIÇÃO SVD E ÍNDICE DE OBSERVABILIDADE.....	30
4.1 DECOMPOSIÇÃO SVD	30
4.2 ÍNDICE DE OBSERVABILIDADE.....	33
5 MÉTODO <i>DOWNHILL SIMPLEX</i> DE NELDER E MEAD EM PROBLEMAS MULTIDIMENSIONAIS	35
6 RESULTADOS	37
<i>Conclusões</i>	41
<i>Referências Bibliográficas</i>	42
<i>Anexo 1 - Formação de imagens levando-se em conta deslocamentos de eletrodos</i>	44
<i>Anexo 2 - Programas</i>	51

RESUMO

Atualmente a tomografia é um importante recurso médico para a detecção e prevenção de doenças. A tomografia por impedância elétrica (TIE) utiliza eletrodos para obter os sinais que geram imagens da distribuição de potencial elétrico e resistividade do órgão estudado. Até o presente momento tais eletrodos são dispostos no paciente de maneira equiespaçada. O objetivo desse trabalho é obter as posições ótimas de eletrodos que fornecem a melhor imagem na tomografia. A distribuição de potenciais elétricos da região em estudo pode ser obtida através da solução do problema direto pelo Método de Elementos Finitos da equação generalizada de Laplace. Para a determinação da posição ótima dos eletrodos realiza-se o problema inverso pela variação do ângulo de cada um dos eletrodos na fronteira do domínio através do algoritmo caixa-preta. A partir dos resultados do algoritmo, maximiza-se um índice de observabilidade baseado na decomposição em valores singulares (SVD) da matriz que correlaciona variações angulares e potenciais elétricos. Por fim, o método *Simplex* de Nelder e Mead é utilizado para obter a configuração de ângulos que maximiza esse índice de observabilidade.

Palavras chave: Elementos finitos, Equação de Laplace, Otimização, Tomografia por Impedância Elétrica, Problema Direto, Problema Inverso.

ABSTRACT

Tomography is an important medical resource for detection and prevention of diseases. The electrical impedance tomography (EIT) makes use of electrodes in order to obtain signals, which create images of electrical potential and resistivity of the human organ in study. The current practice is to dispose the electrodes equally spaced on the patient. The aim of this project is to identify the optimal positions, which allow the production of the best image in the tomography. The electrical potentials distribution can be obtained via the direct finite problem solution of the generalized Laplace Equation. The inverse problem is posed by varying the angle of each electrode in the domain boundary, computing electric potentials and implementing a sensitivity matrix algorithm. From the algorithm results, an observability index is defined based on the SVD decomposition of the matrix that correlates potential distribution and electrodes position variations. At last, the Nelder and Mead Simplex method for minimization is applied to compute optimal electrode positions.

Key-words: Finite elements, Laplace Equation, Electrical Impedance Tomography, Direct Problem, Inverse Problem.

LISTA DE SÍMBOLOS

TIE	Electrical impedance tomography
FEM	Finite element model
n_M	Número de medições na malha de FEM
n_E	Número de eletrodos
n_N	Número de elementos da malha de FEM
$\vec{r}_j$	Vetor deslocamento
$\mathbf{B}$	Matriz de correlação entre resistividades e potenciais elétricos
CEM	<i>Complete Electrode Model</i>
$\mathbf{z}$	Vetor que armazena os dados medidos
$\mathbf{v}_{t_i}$	Vetor que armazena a imagem no instante de tempo t_i
$\mathbf{I}$	Matriz Identidade
F	Filtro Gaussiano
α	Fator de correção para inversão de matriz singular
L	Filtro Passa-Baixo
x	Deslocamento dos eletrodos
σ_{t_1}	Condutividade no instante t_i
$\mathbf{J}$	Jacobiano
$\vec{r}_j$	Vetor de deslocamento do eletrodo j
$\nabla \times$	Operador Rotacional
$\nabla \cdot$	Operador Divergente

∇	Operador Gradiente
e_ℓ	ℓ – <i>ésimo</i> eletrodo
μ	Permeabilidade elétrica
ρ	Resistividade elétrica
$\partial\Omega$	Fronteira do domínio
$\vec{B}$	Campo magnético
$\vec{E}$	Campo Elétrico
$f \circ g$	Função Composta
u, v	Potencial elétrico
SVD	Singular value decomposition
Σ	Matriz diagonal de autovalores da SVD
σ_i	i-ésimo autovalor da matriz Σ

INTRODUÇÃO

A Tomografia por Impedância Elétrica (em inglês, *Electrical Impedance Tomography* – TIE) é uma técnica de obtenção da distribuição de condutividade elétrica internas do corpo mediante os valores de potenciais elétricos medidos em sua superfície por meio de eletrodos. A aplicação desta técnica é bem abrangente, podendo envolver a localização de reservas e minerais subterrâneos, visualização de escoamentos bifásicos em plantas nucleares, trocadores de calor, sistemas de bombeamento de gás e óleo, dentre outras. Na área biomédica, a TIE pode ser utilizada na realização de mamografias, monitoração de escoamento vascular, detecção de acidentes vasculares cerebrais e tumores no tecido pulmonar, dentre outras aplicações.

Certamente, uma das grandes questões postas para a biomedicina é a detecção de edemas e tumores de maneira precoce, possibilitando que o devido tratamento seja ministrado. Todavia, muitos diagnósticos são difíceis devido à impossibilidade de um exame manual por parte do médico ou ausência tecnologias que permitam a visualização das informações concernentes aos órgãos envolvidos. Nesse sentido, a TIE se torna uma ferramenta eficaz na detecção de tumores. A ideia básica dessa técnica é que as condutividades e permissividades elétricas de tumores são diferentes em comparação com tecidos saudáveis. Desta forma, o monitoramento de tais grandezas pode ajudar na identificação e localização de tumores e diversas regiões do corpo, em particular no pulmão humano. Nesse sentido já existem alguns projetos desenvolvidos. Um exemplo, é o aparelho PulmoTraceTM, CardioInspect, da Universidade de TelAviv, que lança mão da TIE e a técnica de medições de bioimpedância.

Um dos fatores que torna a técnica de TIE tão funcional na biomedicina é a possibilidade de realizar exames de modo efetivo e não invasivo. Diagnósticos errôneos quanto à existência e localização de tumores podem provocar cirurgias desnecessárias e até mesmo danosas aos pacientes. Técnicas invasivas podem ser arriscadas e envolver um número maior de procedimentos e pessoas.

O presente trabalho fará um estudo aplicado à detecção de tumores no tecido pulmonar aplicando-se a técnica de TIE na região torácica. O ponto focal é a construção de um algoritmo que permita determinar a localização ótima dos

eletrodos na caixa torácica ao se realizar uma TIE. Até o presente momento o procedimento usual adotado dentre os médicos é usar uma cinta de eletrodos colocados um ao lado do outro. Embora estudos tenham sido publicados apresentando resultados ao se utilizar essa disposição de eletrodos, esse não é necessariamente a melhor configuração para a realização da TIE. Caso conheça-se a melhor posição dos eletrodos, os exames serão mais precisos e menos sujeitos a erros.

Em termos de hardware, a TIE é constituída basicamente de um sistema de sensoriamento composto de eletrodos. Os eletrodos são alocados na superfície do corpo em estudo e corrente é injetada nesse corpo através dos eletrodos. As voltagens resultantes na superfície do corpo são medidas utilizando-se os mesmos eletrodos ou mesmo outros adicionais. Então a distribuição interna de resistividade é computada com base nesses dados de contorno (VAUHKONEN, 2003). Assim, em termos simples, a determinação do posicionamento ótimo dos eletrodos se torna um problema inverso de análise de observabilidade. Em geral, dado um conjunto de sensores, a análise de observabilidade permite verificar se esses são suficientes para determinar todas as grandezas desejadas. No problema ora proposto, além de se fazer uma análise de observabilidade, pretende-se determinar a configuração de sensores que permitirão a melhor obtenção de imagens.

O método a ser desenvolvido nesta monografia envolve primeiramente a solução do problema direto de um modelo de elementos finitos (FEM) em que se modela um segmento do corpo humano com a ajuda de uma malha. Nessa etapa constrói-se um algoritmo que permite obter a distribuição de potenciais elétricos de toda a malha através da imposição de correntes e da medição de alguns potenciais elétricos em eletrodos, cujas posições são conhecidas. O procedimento adotado para se escrever o programa é análogo aos métodos propostos por Logan (1997) para problemas de potencial térmico. O programa foi escrito em ambiente Linux, utilizando-se linguagem C, principalmente a biblioteca Gnu Scientific Library (GSL). A malha foi gerada pelo programa *Gmsh*, também em ambiente Linux.

A segunda etapa da metodologia envolve a solução do problema inverso. Em um problema convencional inverso, dada uma distribuição de potenciais elétricos, pode-se determinar a distribuição de resistividade elétrica da caixa torácica e, deste modo, detectar variações relevantes nesses valores. No entanto, a proposta deste trabalho

é: dada uma variação de distribuição de potenciais elétricos, obter a variação de posição dos eletrodos. O método utilizado é o algoritmo *caixa preta* descrito em *Regularizations for a Black Box TIE algorithm* (MOURA *et al.*, 2009), o qual, dada uma distribuição de potenciais elétricos, permite determinar uma matriz **B** que correlaciona um vetor de deslocamentos de eletrodos com os potenciais elétricos.

Uma vez que o problema inverso tenha sido resolvido é possível decompor a matriz **B** através da *Singular Value Decomposition* (SVD). A matriz Σ resultante desta decomposição é utilizada para criar um índice de observabilidade que é função da posição dos eletrodos. Assim, dependendo de sua localização, o índice poderá ser maior ou menor e, conseqüentemente, sua observabilidade. Quanto maior a observabilidade, melhor será o mapeamento dos potenciais elétricos e da resistividade, permitindo obter melhores imagens. Assim, o último passo do algoritmo é a implementação do método de Mead e Nelder de minimização de funções multivariáveis utilizando o índice de observabilidade como função e as posições dos eletrodos como variáveis.

A real intenção é que o presente estudo contribua não apenas para o entendimento do problema da TIE, mas também auxilie diagnósticos clínicos visando tratamentos mais eficazes e eficientes.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Soleimani, Laberge e Adler (2006) desenvolveram um estudo sobre a influência da movimentação da caixa torácica (e.g., pela respiração) na TIE. O artigo propõe o problema direto pelo método das diferenças e o cálculo do Jacobiano, no problema inverso, impondo um deslocamento dos eletrodos inferior a 10^{-6} . Seu estudo inicial serve de motivação para obter melhores resultados através deste trabalho. Mais detalhes sobre esse artigo podem ser encontrados no ANEXO 1.

Estudos posteriores tentaram otimizar a obtenção de imagens por TIE. Mello propõe um problema semelhante a este trabalho através do Método de Otimização Topológica para o melhor posicionamento dos eletrodos em TIE (MELLO, 2010). Ele propõe algoritmos que visam corrigir o posicionamento dos eletrodos. Também através de um algoritmo de otimização (HERRERA, 2007) implementou um algoritmo baseado no método *simulated annealing*.

MOURA (*et. al*, 2009) descreve o problema inverso de FEM para TIE através do algoritmo *Black-Box*, em que propõe-se a construção de uma matriz **B** de regularização que correlaciona a distribuição de potenciais elétricos obtidos no problema direto com a distribuição de resistividade elétrica.

O presente trabalho implementará um código de otimização, assim como o fizeram HERRERA e MELLO, utilizando porém o algoritmo caixa preta proposto por MOURA aplicado ao problema de posicionamento dos eletrodos.

2 PROBLEMA DIRETO

2.1 MODELO MATEMÁTICO DA TIE

2.1.1 Domínio

O domínio de estudo da TIE é uma região tridimensional fechada Ω e limitada por uma superfície de contorno $\partial\Omega$. Levando em conta o fenômeno físico da condução de eletricidade no corpo humano foram adotadas hipóteses simplificadoras para o modelo. Primeiramente, admite-se que o fenômeno em questão é puramente condutivo (diferentemente, por exemplo, da condução de calor, em que há o efeito convectivo). Além disso, não há nenhuma fonte interna ao domínio de corrente elétrica. Por fim, o meio considerado será admitido isotrópico e de distribuição estacionária de carga. Suas propriedades são a condutividade elétrica $\sigma(x, y, z)$ e a permissividade relativa $\epsilon(x, y, z)$. Essas hipóteses são importantes e significativas para a aplicação das equações de Maxwell que regem o problema.

A corrente elétrica injetada na fronteira do meio gera nele uma densidade de corrente

$$\vec{J}(x, y, z) = \sigma \vec{E}(x, y, z) + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(x, y, z)}{\partial t} \quad (2.1)$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico do meio e ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo. O efeito da permissividade será desprezado neste trabalho tendo em vista a baixa frequência de excitação (125 kHz). Sendo assim:

$$\vec{J}(x, y, z) = \sigma \vec{E}(x, y, z) \quad (2.2)$$

Sendo ϕ o potencial elétrico dentro do domínio, de acordo com (HUA *et al.*, 1993), para frequências de corrente inferiores a 30 MHz pode-se assumir:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\nabla \phi(x, y, z) \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}(x, y, z) = 0 \quad (2.5)$$

Rearranjando-se os termos das equações precedentes, tem-se:

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}(x, y, z)) = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi(x, y, z)) = 0 \quad (2.7)$$

A equação acima é a Equação Generalizada de Laplace aplicada a fenômenos eletromagnéticos e governa o potencial elétrico $\phi(x, y, z)$.

A equação (2.7) é uma equação diferencial homogênea de infinitas soluções. Visto que será essa a equação diferencial utilizada para resolver o problema direto, é necessário limitar o seu número de soluções. Uma maneira de se fazer isso é através do próprio sistema de medição de potenciais e injeção de corrente na TIE. Na TIE um número l conhecido de eletrodos é alocado no contorno do domínio $\partial\Omega$ em estudo. São esses eletrodos que fazem a medição de potenciais elétricos, além da injeção e drenagem de corrente. Assim, sendo J_i a densidade de corrente imposta no i -ésimo eletrodo, pode-se afirmar que:

$$\sigma \frac{\partial \phi(\sigma)}{\partial n} = \begin{cases} J_i, & i = 1, 2, \dots, l \\ 0, & \text{nos demais pontos de } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

A solução da equação generalizada de Laplace para uma dada distribuição de resistividade com as condições de contorno enunciadas acima constitui o problema direto, o qual será resolvido neste trabalho pelo MEF.

2.1.2 Padrões de Injeção de Corrente

Uma das variáveis significativas na TIE é o padrão de injeção de corrente. O número de eletrodos no domínio $\partial\Omega$ e o padrão de injeção e drenagem de correntes está relacionado ao número de medidas independentes possíveis na TIE.

Existem inúmeros métodos ou padrões básicos de injeção e drenagem de corrente, por exemplo: o método dos *eletrodos adjacentes*, o método *pula um eletrodo* e o

método *pula três eletrodos*.

No método dos eletrodos adjacentes, o eletrodo de injeção de corrente é adjacente ao de drenagem de corrente. As medições de potencial elétrico são feitas de maneira similar no par de eletrodos seguintes. Esse método foi proposto por Brown e Seager (HERRERA, 2007). Tem a vantagem de as medições serem diferenciais, cancelando interferências eletromagnéticas e eletrostáticas concomitantes nos condutores ligados aos dois eletrodos.

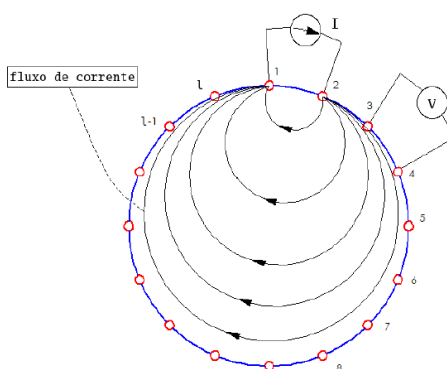


Figura 1 - Injeção de corrente em eletrodos justapostos. (HERRERA, 2007)

No padrão *pula um eletrodo* a corrente é injetada e drenada em dois eletrodos separados por outro eletrodo.

O método de injeção utilizado neste trabalho é o *pula três eletrodos*. Ele é semelhante ao *pula um eletrodo*, com a diferença de que três eletrodos separam os eletrodos de injeção e drenagem de corrente.

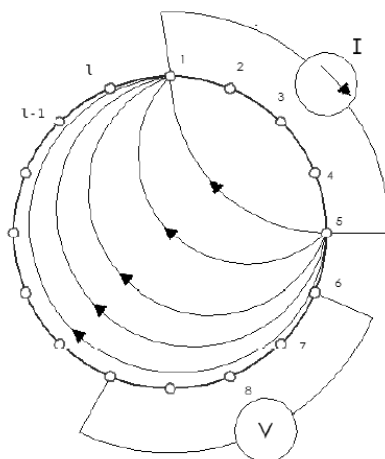


Figura 2 - Injeção de corrente em disposição de eletrodos pula três.

2.2 CONSTRUINDO UMA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA TIE

O método dos elementos finitos constitui-se numa solução aproximada do problema direto através de uma função de interpolação aplicada a cada um dos elementos da malha discretizada do domínio Ω . Desta forma, discretiza-se a malha em m nós e n elementos tetraédricos de condutividades σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ conhecidas.

Seja $\phi_i(x, y, z)$ a função potencial elétrico em um ponto qualquer de um elemento i da malha. Para se estimar a distribuição de potenciais elétricos naquele elemento, pode-se utilizar a seguinte interpolação linear (HERRERA, 2007):

$$V(x, y, z) \cong \sum_{j=1}^4 \phi_{ij}(x, y, z) \quad (2.9)$$

onde ϕ_i corresponde ao potencial do i -ésimo elemento, interpolado por,

$$\phi_i(x, y, z) = \tilde{a} + \tilde{b}x + \tilde{c}y + \tilde{d}z \quad (2.10)$$

onde $\tilde{a}_j$ são função dos potenciais elétricos dos 4 vértices tetraédricos. Assim, pode-se construir o seguinte sistema para cada elemento da malha de finitos:

$$\begin{bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \phi_{i3} \\ \phi_{i4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \\ \tilde{a}_4 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

ou, ainda,

$$\{\tilde{a}\} = [x]^{-1}\{\phi\} \quad (2.12)$$

onde ϕ_{ij} é o potencial do j -ésimo nó do i -ésimo elemento.

Um método computacionalmente sugerido para a solução deste sistema linear é o método dos cofatores (LOGAN, 1997). Assim, pode-se escrever,

$$[x]^{-1} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde,

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

é o determinante de $[x]$, que calculado resulta em,

$$\begin{aligned} 6V = & x_3y_2z_1 - x_4y_2z_1 - x_3y_3z_1 + x_4y_3z_1 + x_2y_4z_1 - x_3y_4z_1 - x_3y_1z_2 + x_4y_1z_2 + x_1y_3z_2 \\ & - x_4y_3z_2 - x_1y_4z_2 + x_3y_4z_2 + x_2y_1z_3 - x_4y_1z_3 - x_1y_2z_3 + x_4y_2z_3 + x_1y_4z_3 \\ & - x_2y_4z_3 - x_2y_1z_4 + x_3y_1z_4 + x_1y_2z_4 - x_3y_2z_4 - x_1y_3z_4 + x_2y_3z_4 \end{aligned}$$

Nas fórmulas acima, V é o volume do tetraedro e os coeficientes α_i , β_i , γ_i e δ_i são os cofatores C_{mn} de $[x]$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = C_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ \alpha_2 = C_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 = C_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ \alpha_4 = C_{41} &= (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ \beta_1 = C_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ \beta_2 = C_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ \beta_3 = C_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\beta_4 = C_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_1 = C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_2 = C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_3 = C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_4 = C_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\delta_1 = C_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$\delta_2 = C_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$\delta_3 = C_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$\delta_4 = C_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Portanto, o potencial no elemento assume a forma:

$$\phi_i = \frac{1}{6V} \sum_{j=1}^4 (\alpha_j + \beta_j x_j + \gamma_j y_j + \delta_j z_j) \phi_{ij} \quad (2.15)$$

ou, ainda, definindo-se fatores de forma:

$$f_j = \frac{1}{6V} (\alpha_j + \beta_j x_j + \gamma_j y_j + \delta_j z_j) \quad (2.16)$$

tem-se,

$$\phi_i = \frac{1}{6V} \sum_{j=1}^4 f_j \phi_{ij} \quad (2.17)$$

O problema direto pode ser então resolvido por se aplicar o princípio variacional, segundo o qual se chega a solução nos valores estacionários de uma função, isto é seu mínimo. Pode-se definir uma funcional de energia potencial para um elemento finito,

$$\pi_h = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\vec{E}|^2 dV_i = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |-\nabla \phi_i|^2 dV_i \quad (2.18)$$

Porém, de acordo com as eq. (2.6, 2.7, 2.10 e 2.16), pode-se escrever $\nabla \phi_i$ como:

$$\nabla \phi_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_{31}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \phi_{i3} \end{bmatrix}$$

ou,

$$\nabla \phi_i = G_i V_i \quad (2.19)$$

onde,

$$G_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_{31}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}_i \quad (2.20)$$

e V_i contém os potenciais nodais do i-ésimo elemento. Logo, a função potencial pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\pi_h = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |G_i V_i|^2 dV_i \quad (2.21)$$

$$\pi_h = V_i^T \left[\frac{1}{2} \iiint_V \sigma G_i^T G_i dV_i \right] V_i \quad (2.22)$$

Visto que deseja-se minimizar π_h com relação aos potenciais, tem-se:

$$\frac{\partial \pi_h}{\partial V_i} = \left[\iiint_V \sigma G_i^T G_i dV_i \right] V_i \quad (2.23)$$

Define-se então:

$$Y_i(\sigma) = \iiint_V \sigma G_i^T G_i dV_i \quad (2.24)$$

como sendo a matriz local de condutividade, de tal sorte que:

$$\frac{\partial \pi_h}{\partial V_i} = Y_i(\sigma_i) V_i \quad (2.25)$$

Definindo-se um vetor condutividade $\vec{\sigma}$ para todos elementos, pode-se definir uma matriz global de condutividade pela fórmula:

$$Y(\vec{\sigma}) = \sum_{i=1}^n Y_i(\sigma_i) \quad (2.26)$$

Através desta matriz, o princípio do variacional é aplicado a todo o domínio discretizado. Deste modo, o problema direto pode ser resolvido através do sistema linear:

$$Y(\vec{\sigma})V = I \quad (2.27)$$

O programa do problema direto foi incorporado como parte do algoritmo caixa-preta e encontra-se no apêndice.

3 ALGORITMO DE REGULARIZAÇÃO PARA O PROBLEMA INVERSO

Na seção anterior deduziu-se a formulação matemática para a obtenção de dados do problema direto de EF. Agora será estudado o problema inverso de EF, suas possibilidades, formulação matemática bem como a opção adotada. O método aqui detalhado é chamado de *black-box algorithm* (“algoritmo caixa-preta”) (MOURA *et al*, 2006).

Como visto anteriormente a TIE estima a distribuição de impedância no domínio, o qual pode ser discretizado através do método de elementos finitos, sendo a variável de interesse o vetor de variação temporal das impedâncias. Nesse método, sabe-se a corrente imposta no tecido, os potenciais medidos no contorno do domínio e a estrutura do modelo (através do problema direto de EFM). O problema de estimação da distribuição de impedância elétrica através dessas informações denomina-se problema inverso de TIE.

Uma possível abordagem é proposta por Barber (Barber e Brown, 1984) na qual adota-se um método isopotencial chamado de método de retroprojeção (*backprojection method*). O problema direto permite obter a distribuição de potencial elétrico V , dada a distribuição de condutividade na região estudada e condições de contorno apropriadas. Na TIE, porém, deseja-se saber distribuição de condutividade dado que conhece-se V (ou o gradiente de V). Assim é necessário um método de reconstrução. Porém, essa reconstrução poderá ser melhor ou pior em função da distribuição de potenciais obtidas através do problema direto e medidas de potencial elétrico. Essa distribuição varia conforme o posicionamento dos eletrodos no domínio, o qual influencia sua observabilidade.

Portanto, para que a distribuição de resistividade (a imagem gerada) seja a melhor possível através do problema inverso de TIE, deve-se maximizar a observabilidade dos eletrodos. Para tanto, propõe-se implementar um algoritmo análogo ao Algoritmo Caixa-Preta (MOURA *et al*, 2006), porém aplicado a mudanças de posições de eletrodos.

3.1 ALGORITMO DO PROBLEMA INVERSO PARA POSIÇÃO DE ELETRODOS

A ideia principal por de trás do método da “caixa-preta” (*black-box*) é o pressuposto de que, se boas imagens e medições existem, então uma matriz que os relacione pode ser estimada. O método toma um conjunto de diferentes imagens e calcula suas respectivas variações dos potenciais nos eletrodos. Desses dois conjuntos de dados estima-se a matriz $\mathbf{B}$.

O algoritmo *black box* estima diretamente a matriz $\mathbf{B}$, dada a variação de potenciais elétricos na fronteira do domínio quando a resistividade de cada elemento do domínio é alterada uma a uma. Uma hipótese fundamental no método é a variação linear dos potenciais elétricos nos eletrodos e variação da resistividade.

Em linhas gerais, primeiramente admite-se uma distribuição de resistividade que será usada como referencial. Além disso, atribui-se um posicionamento específico dos eletrodos. Através de FEM e utilizando-se a referência adotada, os potenciais elétricos são calculados para cada padrão de injeção de corrente. Então uma perturbação na posição de um dos eletrodos é imposta e o problema direto é recalculado para cada padrão de injeção de corrente. Após todos eletrodos terem sido perturbados e o processo repetido para cada um deles, os potenciais elétricos nos eletrodos são computados e normalizados em relação às posições dos eletrodos. A matriz de potenciais elétricos perturbados é construída de tal forma que cada coluna da matriz é um vetor de potencial elétrico perturbado. Através da matriz de potencial elétrico perturbado e da matriz de posições perturbada, é possível determinar a matriz $\mathbf{B}$.

Assim, pode-se definir o seguinte procedimento para encontrar a matriz $\mathbf{B}$:

- a) Admite-se uma distribuição angular inicial dos eletrodos;
- b) Denota-se cada padrão de injeção de corrente por $\{c_j\}_{qx1}$ para $j = 1, 2, \dots, e$;
- c) Atribui-se uma posição inicial dos eletrodos que constitui um vetor $\{\psi^0\}_{ex1}$, sendo que i -ésima posição de $\{\psi^0\}_{ex1}$ corresponde à posição do i -ésimo eletrodo.

- d) Os potenciais elétricos nos eletrodos v_j^0 são determinados através do problema direto por se utilizar apenas os potenciais elétricos nos nós que representam eletrodos para um determinado padrão de corrente:

$$Y|_{\rho^0} v_j^0 = c_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, e \quad (3.1)$$

- e) Uma perturbação conhecida na posição do i -ésimo eletrodo, é denotada por $\delta\psi_i$, $i = 1, 2, \dots, e$;
- f) Para cada um dos e conjuntos perturbados de posições dos eletrodos calcula-se a distribuição de potenciais pelo problema direto em cada um dos $c = 2e$ padrões de corrente;
- g) Vetores $\{\delta\psi^i\}_{ex1}$ são construídos tal que todos os elementos são nulos com exceção do i -ésimo eletrodo que contém $\delta\psi_i$, isto é, $\delta\psi_j^i = \delta\psi_i$;
- h) Para cada padrão de corrente c_j , os potenciais elétricos nos eletrodos v_j^i relacionados à perturbação de posição $\delta\psi^i$ são determinados pelo problema direto, utilizando-se apenas os potenciais elétricos nos eletrodos:

$$Y|_{(\rho^0 + \delta\rho^i)} v_j^i = c_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, e, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

- i) Seja $\{v^i\}_{e^2 \times 1}$ um vetor aumentado formado por todos v_j^i , tal que:

$$v^0 = \begin{bmatrix} v_1^i \\ v_2^i \\ \dots \\ v_e^i \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- j) Cria-se um vetor normalizado $\{\psi^i\}_{n \times 1}$ tal que cada elemento seja

$$\psi_j^i = \psi_j^i - \psi_j^0 \quad (3.4)$$

k) Cria-se um vetor normalizado $\{\theta^i\}_{e^2 x 1}$ tal que cada elemento seja

$$\theta^i = v^i - v_j^0 \quad (3.5)$$

l) Define-se uma matriz $\Psi_{n \times n}$ tal que

$$\Psi = [\psi^1 \dots \psi^i \dots \psi^n] \quad (3.6)$$

Note-se que, como por definição $\psi_j^i = 0$ para $i \neq j$, então Ψ é diagonal.

m) Define-se uma matriz Θ tal que

$$\Theta = [\theta^1 \dots \theta^i \dots \theta^n] \quad (3.7)$$

n) Como cada coluna de Ψ é uma imagem e pode ser relacionada a uma coluna de Θ por uma matriz B , pode-se dizer

$$\Psi_{n \times n} = B_{n \times e^2} \Theta_{(e^2 \times n)} \quad (3.8)$$

o) Por fim, determina-se a matriz B .

3.1.1 Determinação de B

Como a matriz B não é quadrada, o problema é mal condicionado. Existem diversos métodos para o cálculo da matriz. Aqui mostrar-se-á o método pela Regularização de Tikhonov (MOURA *et al*, 2006; TIKHONOV, 1977).

A matriz B correlaciona as matrizes $\Psi_{n \times n}$ e $\Theta_{e^2 \times n}$ pela expressão:

$$\Psi_{n \times n} = B_{n \times e^2} \Theta_{e^2 \times n} \quad (3.9)$$

Pós multiplicando essa expressão por $\Theta_{e^2 \times n}^T$, tem-se:

$$\Psi_{n \times n} \Theta_{n \times e^2}^T = B_{n \times e^2} \Theta_{e^2 \times n} \Theta_{n \times e^2}^T \quad (3.10)$$

Logo, pode-se escrever B como:

$$B_{n \times e^2} = \Psi_{n \times n} \Theta_{n \times e^2}^T (\Theta_{e^2 \times n} \Theta_{n \times e^2}^T)^{-1} \quad (3.11)$$

Como a matriz $\Theta_{e^2 \times n} \Theta_{n \times e^2}^T$ é singular, é necessário regularizá-la por se somar um termo identidade multiplicado por um fator λ muito pequeno (de ordem inferior a 10^{-6} ., resultando:

$$B_{n \times e^2} = \Psi_{n \times n} \Theta_{n \times e^2}^T (\Theta_{e^2 \times n} \Theta_{n \times e^2}^T + \lambda I_{e^2 \times e^2})^{-1}$$

O erro associado a essa regularização é dado por:

$$E = \Psi^T - \Theta^T B^T$$

O índice de erro é dado por:

$$IE = E^T E + \lambda B B^T$$

O fluxograma a seguir mostra a rotina utilizada para o cálculo da matriz ***B***.

3.2 FLUXOGRAMA DO ALGORITMO CAIXA PRETA

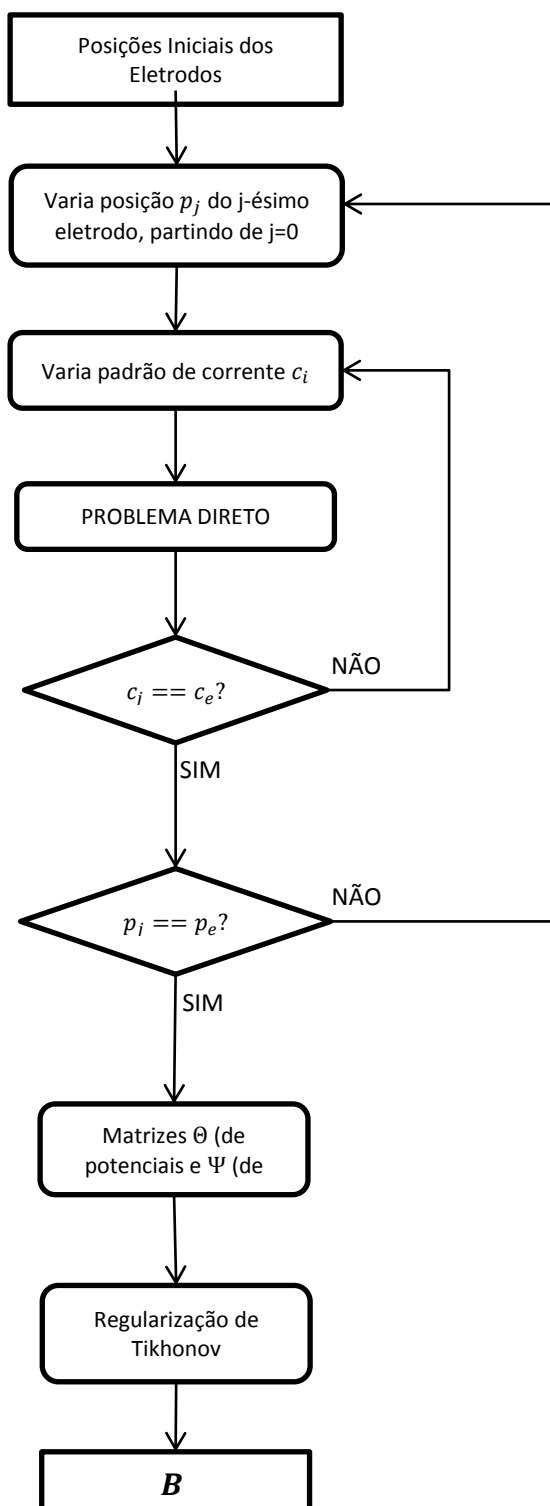


Figura 3 - Fluxograma do algoritmo caixa preta para cálculo da matriz B .

4 DECOMPOSIÇÃO SVD E ÍNDICE DE OBSERVABILIDADE

4.1 DECOMPOSIÇÃO SVD

Em geral é possível resolver problemas (como sistemas lineares) quando estes são quadrados. No entanto, quando as matrizes envolvidas nos problemas são retangulares, não é possível obter uma resposta pelos métodos tradicionais. Por exemplo, caso deseje-se saber os autovalores e autovetores de uma matriz retangular não quadrada, o método por definição diz que:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Porém, sendo A uma matriz retangular, esse método conduz a um sistema com mais incógnitas do que equações (ou vice-versa), ou à inversa de uma matriz retangular. Portanto, para resolver este problema é necessário utilizar outro método. Um método eficaz é a Decomposição USV (*Singular Value Decomposition*).

A decomposição USV está baseada no seguinte teorema da álgebra linear: qualquer matriz A $M \times N$ pode ser escrita como o produto de uma matriz U coluna ortogonal $M \times N$, uma matriz diagonal $N \times N$ com valores positivos e zeros (os valores singulares ou autovalores) e a transposta de uma matriz ortogonal $N \times N$.

A ideia por trás da decomposição singular USV situa-se nos espaços das linhas e colunas de uma matriz. Através da decomposição USV deseja-se encontrar uma base ortonormal geradora do espaço das linhas que contenha uma base ortogonal geradora do espaço das colunas.

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço das n linhas de uma matriz retangular e $\mathbb{R}^m$ o espaço das m colunas dessa matriz. Além disso, seja uma base ortogonal do espaço $\mathbb{R}^n$ composta por vetores $\vec{V}_j$ e uma base ortogonal do espaço $\mathbb{R}^m$ composta por vetores $\vec{U}_j$. Pode-se correlacionar os vetores geradores dessas bases por uma matriz A , de tal forma que:

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= A \vec{V}_1 \\ \vec{U}_2 &= A \vec{V}_2\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{U_j} = A \overrightarrow{V_j}$$

Porém, se V for ortonormal, então as relações anteriores deverão ser multiplicadas por σ_j , de tal sorte que:

$$\begin{aligned}\sigma_1 \overrightarrow{U_1} &= A \overrightarrow{V_1} \\ \sigma_2 \overrightarrow{U_2} &= A \overrightarrow{V_2} \\ \sigma_3 \overrightarrow{U_j} &= A \overrightarrow{V_j}\end{aligned}$$

As relações acima podem ser escritas como:

$$A [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_R] = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_R] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ou, compactamente:

$$A V = U \Sigma$$

Para isolar A basta multiplicar a equação pela transposta de V . Assim,

$$\begin{aligned}A V V^T &= U \Sigma V^T \\ A &= U \Sigma V^T\end{aligned}$$

A equação acima é a *singular value decomposition*. O significado das matrizes e seu método de obtenção pode ser visualizado por pré-multiplicar a decomposição pela transposta de A . Fazendo isso, obtém-se:

$$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T \quad (4.2)$$

Como U é ortogonal, tem-se:

$$A^T A = V \Sigma^T I \Sigma V^T, \quad (4.3)$$

onde I é a matriz identidade. Porém, como Σ é diagonal, a relação acima reduz-se a:

$$A^T A = V \Sigma^2 V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} V^T \quad (4.4)$$

A partir desta relação consegue-se entender alguns fatos importantes. Como $A^T A$ é uma matriz simétrica positiva definida, os valores de Σ são os autovalores de $A^T A$ e a matriz V contém seus autovetores. Caso a decomposição tivesse sido pós multiplicada em vez de pré multiplicada, a relação obtida seria análoga para a matriz U .

Portanto, o resultado da decomposição SVD são duas matrizes ortogonais com vetores geradores das linhas e colunas de uma matriz A , bem como uma matriz diagonal que contém os seus autovalores.

Uma dedução rigorosa desse teorema pode ser vista em *Matrix Computations* (GOLUB, 1996).

Qualquer matriz pode ser assim decomposta. Porém, as formas assumidas pela decomposição SVD dependem do tamanho da matriz A (PRESS, 2007). Se a matriz $A_{M \times N}$ for tal que $M > N$, a decomposição se assemelhará à seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots \\ & & & & \sigma_{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V^T \end{pmatrix}$$

Para uma matriz $M < N$, a decomposição se assemelhará à seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots \\ & & & & \sigma_{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V^T \end{pmatrix}$$

Um algoritmo para o cálculo das matrizes U , S e V da decomposição singular pode

ser encontrado em *Numerical Recipes* (PRESS, 2007). A biblioteca *GSL* já dispõe de três algoritmos prontos para a decomposição USV para matrizes de $M > N$. (GALASSI *et al.*, 2009) No entanto, caso o interesse seja apenas na obtenção da matriz Σ , pode-se aplicar o algoritmo para a transposta de A . Isso é facilmente demonstrável. Partindo-se da transposta da decomposição USV, tem-se:

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T \quad (4.5 \text{ a})$$

$$A^T = (V^T)^T \Sigma^T U^T \quad (4.5 \text{ b})$$

$$A^T = V\Sigma^T U^T \quad (4.5 \text{ c})$$

Portanto, caso o algoritmo seja aplicado para a transposta de A , a matriz Σ' é simplesmente Σ^T da decomposição USV de A . Como Σ é diagonal,

$$\Sigma' = \Sigma^T = \Sigma. \quad (4.6)$$

4.2 ÍNDICE DE OBSERVABILIDADE

A matriz diagonal Σ contém na sua diagonal principal os autovalores de A ou, no caso do problema inverso aqui tratado, os autovalores da matriz B que correlaciona variações angulares dos eletrodos com as variações de potencial elétrico no domínio Ω . Quanto menores forem os autovalores dos primeiros termos da diagonal, maior será a observabilidade da posição dos eletrodos. Os outros termos da diagonal podem constituir o espaço de ruído numérico. Assim, pode-se definir um índice de observabilidade $I(B)$:

$$I(B) = \sum_{i=1}^n 1/\sigma_i$$

Esse índice corresponde à soma dos recíprocos dos n primeiros termos da diagonal principal da matriz Σ da decomposição USV. Maximizar esse índice significa maximizar a observabilidade. Porém, I é uma função composta:

$$I = I(B(p_1, p_2, \dots, p_e)) \quad (4.8)$$

onde p_i são as posições dos eletrodos. Assim, ao maximizar o índice, a posição de eletrodos que maximiza a observabilidade é definida. Isso pode ser feito através do algoritmo *simplex*.

5 MÉTODO *DOWNHILL SIMPLEX* DE NELDER E MEAD EM PROBLEMAS MULTIDIMENSIONAIS

O método de minimização desenvolvido por Nelder e Mead tem por objetivo achar o mínimo local de uma função multivariável. No caso deste trabalho, a função multivariável é o índice de observabilidade, o qual tem o número de eletrodos como sendo o número de variáveis. O método é descrito em *Numerical Recipes* (PRESS, 2007).

A abordagem do simplex é geometricamente intuitiva. Constrói-se numa figura geométrica de dimensão N e $N + 1$ vértices e todas as suas arestas e faces (e.g, em duas dimensões o *simplex* é um triângulo, em três um tetraedro).

No algoritmo inicia-se com uma tentativa (i.e., um vetor de N variáveis independentes no ponto de início). O algoritmo então deve conduzir esse vetor “colina abaixo” (“downhill”) através da topologia até encontrar um mínimo.

O método *simplex* precisa iniciar com $N + 1$ pontos, os quais definem um *simplex* inicial. Se esse ponto inicial for P_0 , então os outros N pontos podem ser:

$$P_i = P_0 + \Delta e_i \quad (5.1)$$

onde e_i 's são versores de ordem N e Δ é uma constate característica arbitrada como sendo o comprimento característico do problema.

Então o método passa a realizar uma série de passos, a maioria deles simplesmente se movendo o ponto do *simplex* onde a função é maior até a face oposta do *simplex* para um ponto mais baixo. Esses passos são denominados reflexões e conservam o volume do simplex. Depois, o método expande o *simplex* em uma direção para dar um passo maior. Ao encontrar um vale, o método contrai-se numa direção transversal e tenta seguir para o fundo do vale.

O algoritmo escrito em sua totalidade pode ser encontrado em *GSL gnu Manual Reference* (GALASSI *et al.*, 2009), em linguagem C e em *Numerical Recipes* (PRESS, 2007), linguagem C++.

Esse algoritmo foi implementado para minimizar o inverso do índice de observabilidade e pode ser visto no ANEXO.

6 RESULTADOS

A rotina Simplex minimizou o índice,

$$I = - \sum_{e=1}^n \sigma_e$$

onde os σ_e são valores singulares de B, para uma particular malha de 1206 elementos e 337 nós, mostrada abaixo conforme gerada pelo programa *Gmsh*.

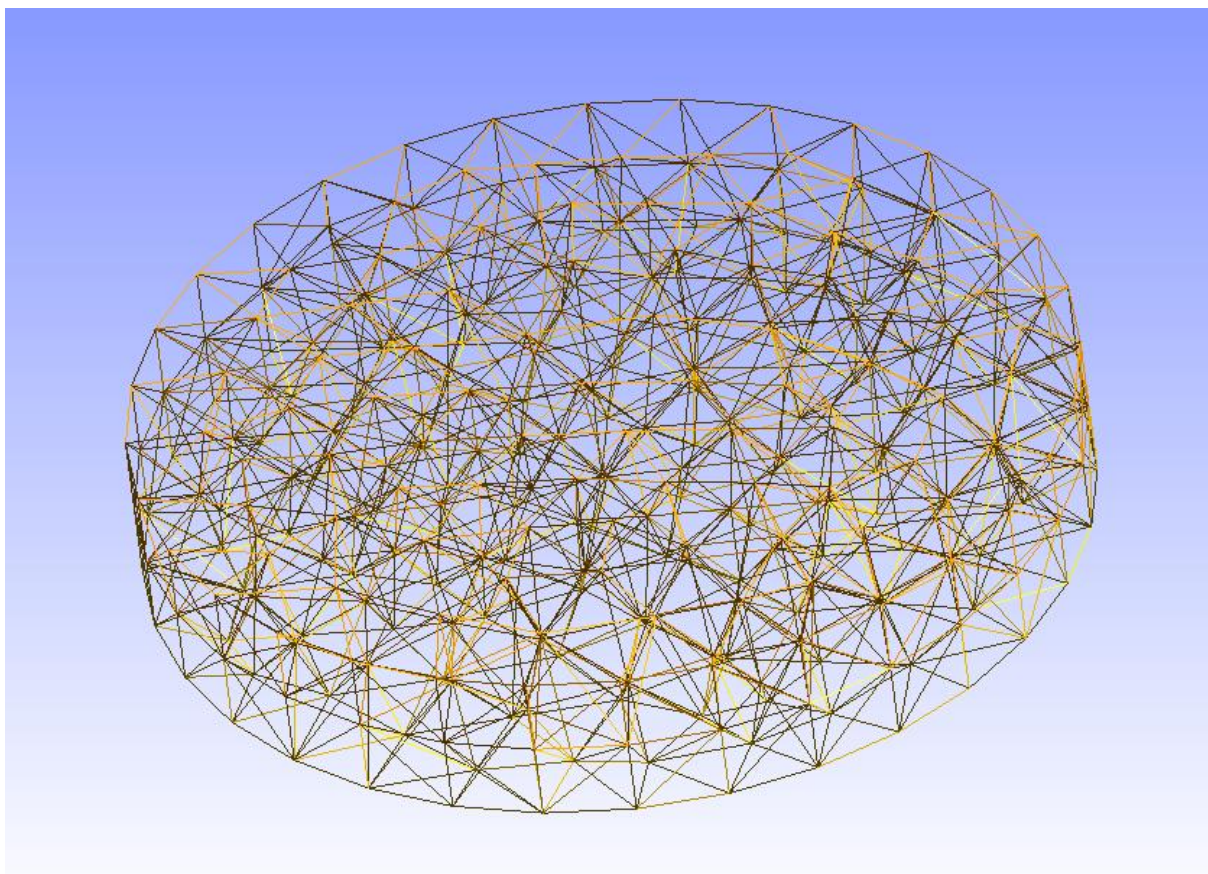


Figura 4 - Malha de 1206 elementos finitos gerada em Gmsh.

Atribuiu-se uma precisão 10^{-3} . A rotina rodou 59 vezes antes de convergir para o valor mínimo. O valor do índice encontrado no ponto de convergência foi $I =$

$1,29745 \cdot 10^8$. Os valores iniciais e de convergência dos ângulos dos eletrodos (em radianos) são dispostos na tabela a seguir.

Tabela 1 - Tabela com resultados das posições do algoritmo

Equiespaçados (°)	Simplex (°)	Δ (°)	L (mm) (para C=90 cm)
0	-0.02099	0.020987	0.052467607
11.25	11.7261	0.476097	1.190242348
22.5	22.49111	0.008886	0.022213817
33.75	33.7754	0.025404	0.063509142
45	45.02537	0.025373	0.063431671
56.25	56.2754	0.025399	0.063497439
67.5	67.02518	0.474824	1.18706042
78.75	78.77539	0.025394	0.063485737
90	90.02542	0.025421	0.063551505
101.25	102.7755	1.52545	3.813626043
112.5	112.5255	0.025473	0.063683042
123.75	123.7755	0.0255	0.063748811
135	135.0255	0.025526	0.063814579
146.25	146.7752	0.525171	1.312928341
157.5	157.5256	0.025578	0.063946116
168.75	168.7756	0.025605	0.064011885
180	180.9888	0.988773	2.471932787
191.25	191.2757	0.025657	0.064143422
202.5	202.5251	0.025111	0.062776796
213.75	214.7343	0.984268	2.460670937
225	225.0252	0.025163	0.062908333
236.25	236.2752	0.02519	0.062974101
247.5	247.4868	0.013172	0.032930561
258.75	259.2754	0.525434	1.313586026
270	270.0253	0.025269	0.063171407
281.25	281.2753	0.025295	0.063237175
292.5	292.2595	0.240531	0.601328099

303.75	303.7753	0.025347	0.063368712
315	314.5252	0.474818	1.187045907
326.25	326.2754	0.0254	0.063500249
337.5	337.7752	0.275236	0.688090014
348.75	349.243	0.492986	1.232465688

As posições relativas entre os eletrodos nas posições originais (equiespaçadas) e as posições após a aplicação do algoritmo são ilustradas na figura a seguir.

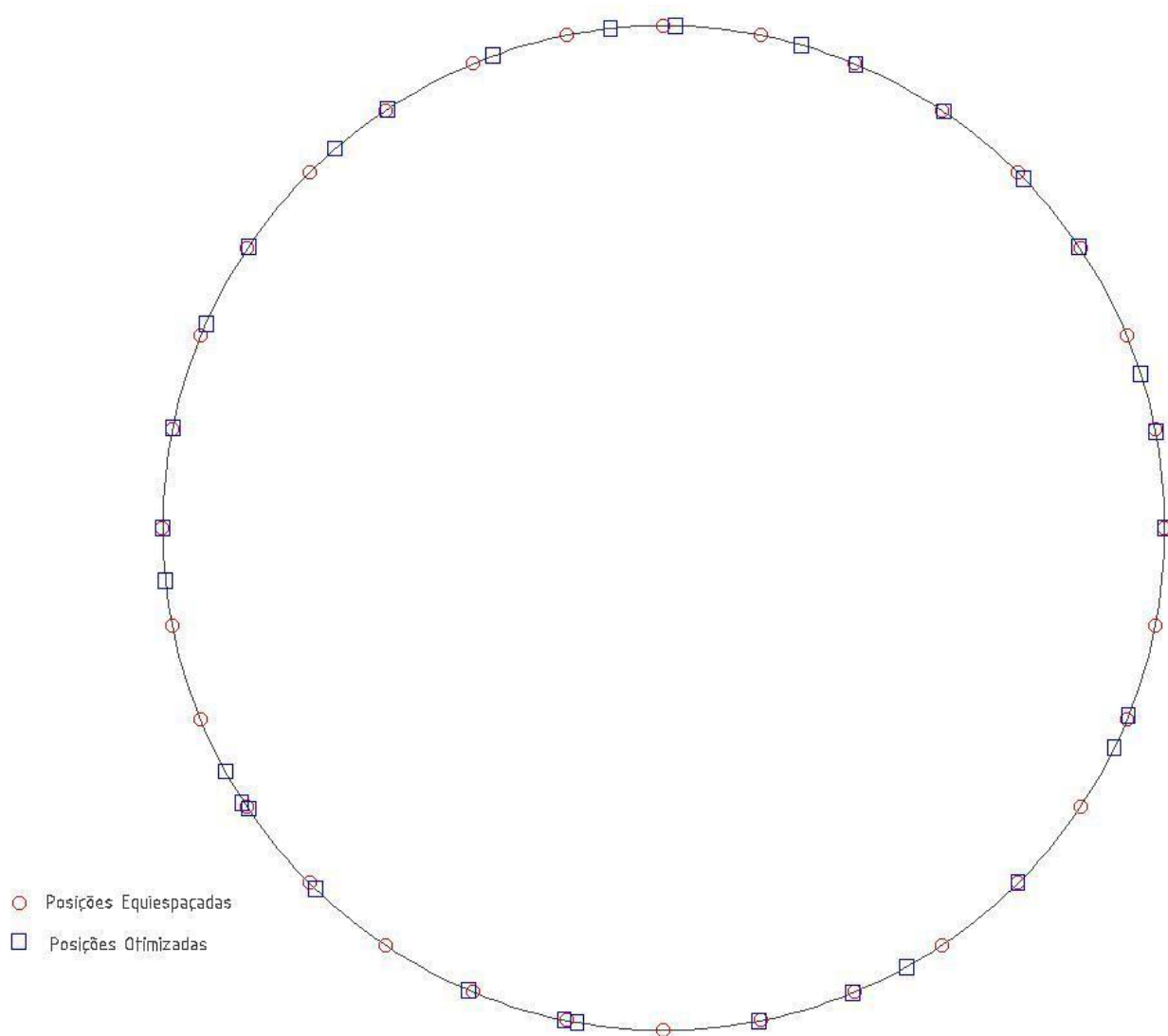


Figura 5 - Comparação entre posições equiespaçadas e otimizadas. A diferença foi exagerada em 10 vezes para permitir melhor visualização na escala da figura.

CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo a proposição de um algoritmo para determinar a posição ótima de eletrodos numa tomografia por impedância elétrica. A motivação do trabalho é tornar mais eficaz o procedimento de TIE, que atualmente é feito por um cinto de eletrodos disposto adjacientemente.

A metodologia aqui proposta é o desenvolvimento de um algoritmo de elementos finitos que, através do conceito de observabilidade permite encontrar o posicionamento ótimo dos eletrodos. O algoritmo compõe-se basicamente de três rotinas principais: o problema direto, o problema inverso e o método *simplex*.

O problema direto constitui-se basicamente na determinação da distribuição de potenciais elétricos numa região do corpo humano através de sua discretização em elementos finitos e a imposição de potenciais conhecidos nos eletrodos.

A segunda parte do programa foi a implementação do algoritmo caixa preta para o cálculo do problema inverso de finitos, gerando uma matriz B que correlaciona variações angulares com a distribuição de potencial.

A parte final do algoritmo decompõe a matriz B através do algoritmo USV para definir um índice de observabilidade e aplica o método *simplex* de Mead e Nelder para obter a posição de máxima observabilidade dos eletrodos.

Através deste algoritmo pode se determinar a posição ótima dos eletrodos para a malha gerada e para o índice de performance escolhido. Foi significativo observar que a posição ótima dos eletrodos não é equiespaçada, como se tem tomado por prática em TIE. O índice de performance que foi utilizado não é definitivo ainda, em trabalhos futuros várias formas de índices de observabilidade serão comparadas através da qualidade da imagem reconstruída.

Acredita-se que este algoritmo poderá ser utilizado ainda para malhas maiores e utilizado para pesquisas no sentido de prover o melhor posicionamento dos eletrodos em TIE realizadas em seres humanos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Obras

GALASSI, Mark. *et al.* **Reference Manual for GSL**. [s.l.] Network Theory Ltd, 2009.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations – Third Edition**. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.

HERRERA, Claudia Natalia Lara. **Algoritmo de Tomografia por Impedância Elétrica baseado em *Simulated Annealing***. 2007. 59 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2007.

HINTON E.; OWEN, D.R.J. **An Introduction to Finite Element Computations**. Pinebridge Press Limited, Swansea, U.K., 1979.

LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Element Method**. PWS Publishing Company: Boston, 1997. 908p.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. MILLA. **Espaços de Sobolev**. Instituto de Matemática da UFRJ: Rio de Janeiro, 2000. 164p.

MELLO, Luís Augusto Motta. **Estudo de aumento de desempenho de um sistema de tomografia de impedância elétrica através de método de otimização topológica**. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010, 247p.

NOGUEIRA, Marcelo Marques. **Tomografia Óptica Difusa: Hardware e Testes *in vitro***. 2007. 83p. (Monografia – Graduação em Engenharia Mecânica) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2007.

PRESS, William H. *et al.* **Numerical Recipes – The art of Scientific Computing – Third Edition**. New York: Cambridge University Press, 2007. 1235p.

VAUHKONEN, Päivi J. **Image Reconstruction in Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography**. Tese (Doutorado) – University of Kuopio, Kuopio, Finlândia, 2004. 199p.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física III – Eletromagnetismo**. Pearson – Addison Wesley: São Paulo, 2007. 402p.

Artigos

ADLER, Andy; LABERGE, Camille; SOLEIMANI, Manuchehr. Imaging of conductivity changes and electrode movement in TIE. *Physiological Measurement*, N°27, 2006.

BARBER, D. C.; BROWN, B. H. Applied Potential Tomography. *Journal Medical Engineering & Technology*. vol. 27, N° 3, 2003.

BROWN, B. H. Electrical Impedance Tomography (TIE): a Review. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 17, N° 9, 1984.

MOURA, Fernando Silva de. et al. Regularizations for a Black Box TIE algorithm. *ABCM Symposium Series in Mechatronics*, 2006.

ANEXO 1 - FORMAÇÃO DE IMAGENS LEVANDO-SE EM CONTA DESLOCAMENTOS DE ELETRODOS

Por ser uma técnica não invasiva e, conseqüentemente, pouco agressiva ao corpo humano, a TIE têm sido usada preferencialmente a outros métodos. No entanto, ainda existem alguns pontos a serem aprimorados na obtenção de imagens através deste procedimento. Um dos campos a serem estudados é o deslocamento de eletrodos.

Estudos têm mostrado que eletrodos estáticos geram incertezas bem pequenas na obtenção de imagens, a despeito de eletrodos que se movimentam (BARBER, 2008). No entanto, em aplicações biomédicas é recorrente a movimentação de eletrodos. Por exemplo, a expansão da caixa torácica durante a respiração e mudança de postura influenciam significativamente a posição destes e a obtenção de imagens. Diversos métodos já foram propostos para a melhoria da obtenção de imagens face a esse problema. Esta seção baseia-se no método proposto por (SOLEIMANI; ADLER, 2006) que utiliza a técnica de uma matriz inversa regularizada e ilustra bem o problema proposto neste trabalho.

A reconstrução da imagem é feita através de um modelo de elementos finitos que será apresentado posteriormente em detalhes neste trabalho. O modelo de elementos finitos (FEM) constitui-se de um meio condutor discretizado em n_N elementos em que n_E eletrodos são afixados aos limites da malha do FEM. Uma corrente é imposta a essa malha obtendo-se n_M medições (os índices N , E e M se referem aos elementos da malha, eletrodos e medições, respectivamente).

As imagens são obtidas através da diferença de conjunto de dados (malhas) obtidos designados por $\mathbf{v}_{t_i}$, em que t_i representa o instante de tempo da tomada dos dados. Cada vetor coluna $\mathbf{v}_{t_i}$ possui as informações dos n_N elementos no instante da medição e, portanto, sua dimensão é $[\mathbf{v}_{t_i}] = (n_N \times 1)$. Baseados nesses vetores, a diferença de potenciais de dois instantes consecutivos ($\mathbf{v}_{t_2} - \mathbf{v}_{t_1}$) é calculada e representada por um vetor $\mathbf{z}$ que armazena os dados de todas as medições e, portanto, tem dimensão $[\mathbf{z}] = (n_M \times 1)$. Através das tomadas de dados mede-se a

condutividade σ_{t_i} . Logo, dispõe-se de n_M nós com condutividades σ_{t_1} e σ_{t_2} medidas nos instantes t_1 e t_2 .

No método de TIE por diferenças assume-se que as diferenças de medições dependem apenas da mudança de condutividade entre as malhas de dados. Portanto:

$$\Delta\sigma = \sigma_{t_2} - \sigma_{t_1} \quad (\text{A1.1})$$

Para quantificar o efeito dos deslocamentos na medição é necessário definir um vetor um vetor deslocamento $\vec{r}$. Seja j o índice dos eletrodos e $(x, y, z, 0)$ o sistema de coordenadas. Nessa notação, x_{j,t_2} representa a coordenada média x do j -ésimo eletrodo no instante t_2 . Assim, define-se como vetor deslocamento:

$$\vec{r}_j = (x_{j,t_2} - x_{j,t_1}, y_{j,t_2} - y_{j,t_1}, z_{j,t_2} - z_{j,t_1}) \quad (\text{A1.2})$$

Para pequenos deslocamentos é razoável adotar a hipótese de que todos os nós da malha de EF têm o mesmo deslocamento em módulo e sentido. Assumindo-se isso, pode-se reconstruir uma imagem $\hat{x}$ que represente a variação de condutividade $\Delta\sigma$ dos n_N elementos e o deslocamento das coordenadas espaciais dos n_E eletrodos. Por isso, para o problema bidimensional tem-se $[\hat{x}] = (n_N + 2n_E)x1$.

A reconstrução da imagem $\hat{x}$ é formulada através de uma matriz inversa regularizada. Esse artifício matemático é utilizado quando se necessita da inversa de uma matriz não invertível. Seja, por exemplo, $\tilde{A}$ tal que $\nexists \tilde{A}^{-1}$. Nessas condições pode-se somar uma matriz de elementos de módulo infinitesimal à matriz $\tilde{A}$ para torná-la invertível:

$$\tilde{A}^{-1} = (\tilde{A} + \alpha I)^{-1} \quad (A1.3)$$

onde I é matriz identidade de mesma ordem de $\tilde{A}$ e α é um número real pequeno (da ordem de 10^{-6}). Visto que α é pequeno, o segundo termo do lado direito da equação não alterará substancialmente $\tilde{A}$, mas a tornará invertível. Pode-se decompor a matriz identidade convenientemente em duas matrizes (sendo uma a inversa da outra), de tal sorte que:

$$\tilde{A}^{-1} = (\tilde{A} + \alpha F^t F)^{-1} \quad (A1.4)$$

sendo que F representa um filtro Gaussiano passa alta. Em outros termos, pode-se dizer que:

$$F = I - L \quad (A1.5)$$

onde L é um filtro passa baixa.

Usando essa técnica, é possível computar as diferenças de medições $\mathbf{z}$ de condutividade e deslocamento de eletrodos, $\mathbf{x}$, por um operador $\mathbf{U}$, baseado na hipótese de distribuição homogênea de σ_h e t_1 . Isto é:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}(\mathbf{x})|_{\sigma_h} \quad (A1.6)$$

A reconstrução da imagem é formulada por uma malha *maximum a posteriori* usando um filtro Gaussiano. A imagem reconstruída é dada por:

$$\hat{x} = \arg \min_x (\mathbf{z} - U(\mathbf{x}))^t \Sigma_n^{-1} (\mathbf{z} - U(\mathbf{x})) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty)^t \Sigma_x^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty) \quad (\text{A1.7})$$

Na relação acima, $\mathbf{x}_\infty$ representa o valor esperado para a mudança de condutividade do elemento e do deslocamento dos eletrodos. Assumindo que esses valores tenham uma distribuição normal, então haverá igualdade de valores positivos e negativos, os quais se cancelarão. Portanto, assumir $\mathbf{x}_\infty = 0$ é uma boa aproximação.

As matrizes Σ_n e Σ_x são as matrizes de estimativas *a priori* da imagem (amplificadas pelos dados de deslocamento dos eletrodos) e de medida da covariância de ruídos, respectivamente, tal que cada elemento $[\Sigma_x]_{i,j}$ representa $cov(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$.

As matrizes de covariância não são calculadas diretamente, mas sim desenvolvidas em outras duas matrizes, $\mathbf{W}$ e $\mathbf{R}$. Dada uma amplitude média de ruído de medição σ_n , $\mathbf{W}$ pode ser definida como:

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{W} = \Sigma_n^{-1} \quad (\text{A1.8})$$

onde $\mathbf{W}_{i,i}$ representa o inverso do ruído relativo de potência por medição i . Por simplicidade de modelo pode-se admitir $\mathbf{W} = \mathbf{I}$.

A parte superior $n_N \times n_N$ de Σ_x^{-1} representa a covariância entre as mudanças de condutividade dos elementos finitos, enquanto que a parte inferior $3 n_E \times 3 n_E$ (para modelamento 3D) representa a covariância dos deslocamentos dos eletrodos. Assumindo a hipótese de que essas covariâncias não estão relacionadas, pode-se escrever:

$$\Sigma_x^{-1} = \frac{1}{\sigma_c^2} \mathbf{R}_c + \frac{1}{\sigma_m^2} \mathbf{R}_m \quad (\text{A1.9})$$

onde σ_c e σ_m são, respectivamente, são as amplitudes *a priori* da mudança condutividade e do deslocamento dos eletrodos. $\mathbf{R}_c$ é matriz de regularização da mudança de condutividade e possui valores não nulos nas $n_N \times n_N$ posições superiores. $\mathbf{R}_m$ é matriz de regularização dos deslocamentos dos eletrodos e possui valores não nulos nas $3 n_E \times 3 n_E$ posições inferiores apenas.

É de interesse analisar o significado físico de cada um dos termos da equação.

O primeiro termo, $(\mathbf{z} - U(\mathbf{x}))^t \Sigma_n^{-1} (\mathbf{z} - U(\mathbf{x}))$, visa minimizar as alterações na imagem devido aos deslocamentos dos eletrodos. Isso pode ser visto por se lembrar que $\mathbf{z}$ representa o vetor de medições e $U(\mathbf{x})$ é o operador relacionado à hipótese de deslocamentos uniformes dos eletrodos segundo um valor esperado. Assim, esse termo identifica a menor diferença entre o valor medido e o valor esperado dos deslocamentos já relacionando-se o ruído da medições. Ou seja, este termo objetiva minimizar os efeitos na imagem devido a ruídos, porém não deixando de considerá-los.

O segundo termo, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty)^t \Sigma_x^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty)$, relaciona os deslocamentos e variação de condutividade com a matriz de suas respectivas covariâncias. Levando em conta que o vetor $\mathbf{x}$ é um vetor que armazena a medição de tais grandezas, esse termo minimiza o erro do modelo nas voltagens aplicadas para medição das condutividades do FEM. Esse termo desempenha o papel da matriz Gaussiana como filtro passa alta, na seguinte forma:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty)^t \Sigma_x^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty) \equiv \alpha \mathbf{x}^t \mathbf{U}^t \mathbf{U} \mathbf{x} \quad (\text{A1.10})$$

Essa característica confere suavidade e continuidade nas imagens geradas.

De acordo com Adler (1996), para que a suavidade esperada seja obtida, $\mathbf{R}_c$ deve ser modelada usando um filtro Laplaciano discreto, de tal sorte que $[\mathbf{R}_c]_{i,i} = n_D + 1$. Os elementos fora da diagonal, $[\mathbf{R}_c]_{i,j}$, valerão -1 , caso os elementos finitos

i e j sejam adjacentes, ou zero, caso contrário. Para o modelo de deslocamento dos eletrodos $\mathbf{R}_m$, assume-se uma relação de inter-elementos não nula, visto que espera-se que elementos adjacentes se movam de maneira similar. Assim, de maneira análoga, faz-se $[\mathbf{R}_m]_{i,i} = 2,1$ e $[\mathbf{R}_c]_{i,j} = -1$, caso os elementos finitos i e j sejam adjacentes, ou zero, caso contrário.

O cálculo da matriz inversa vista em (A1.7) será modificado de forma a levar em conta o deslocamento dos eletrodos. Adler propõe calcular o Jacobiano usando o método de perturbações, em que o (i, j) elemento do Jacobiano $\mathbf{J}$ representa razão da alteração na medição em i para uma pequena mudança finita em j . Desta forma, define-se:

$$J_{i,j} = \frac{U_i(x_j + \Delta x_j)}{\Delta x_j} \quad (\text{A1.11})$$

Segundo Adler, Δx_j deve ser suficientemente grande para se evitarem erros, porém pequeno o suficiente para uma boa aproximação do Jacobiano. Usando o argumento de se utilizar precisão matemática dupla, o autor adota $\Delta x_j = 10^{-6}$.

No entanto, a afirmação de Adler incorre em algumas imprecisões físicas e matemáticas.

A adoção de $\Delta x_j = 10^{-6}$ admite uma variação infinitesimal de x . Do ponto de vista matemático, isso poderia ser escrito como:

$$J_{i,j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{U_i(x_j + \Delta x_j)}{\Delta x_j} \quad (\text{A1.12})$$

a qual é a definição da derivada de F . Dessa constatação depreende-se que Adler assumiu que as medições nos eletrodos são feitas de maneira contínua. Todavia, verifica-se empiricamente de maneira simples que a escolha arbitrária de $\Delta x_j = 10^{-6}$

é demasiadamente pequena e que o problema físico é discreto, pois as variações no tempo são finitas, tornando a abordagem adotada imprecisa.

ANEXO 2 - PROGRAMAS

```

FUNÇÃO MINIMIZE

#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include <gsl/gsl_vector.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_linalg.h>
#include <gsl/gsl_blas.h>
#include <gsl/gsl_multimin.h>
#include "logan.h"

#define ne 2                /* number of
finite elements */
#define pi 3.14159265359

int main() {

double b,d;

b=pi/32;
d=pi/360;

double par[32] =
{0,b,2*b,3*b,4*b,5*b,6*b,7*b,8*b,9*b,10
*b,11*b,12*b,13*b,14*b,15*b,16*b,17*b
,18*b,19*b,20*b,21*b,22*b,23*b,24*b,2
5*b,26*b,27*b,28*b,29*b,30*b,31*b};

const gsl_multimin_fminimizer_type *T =
gsl_multimin_fminimizer_nmsimplex2;

gsl_multimin_fminimizer *s = NULL;

gsl_multimin_function minex_func;
size_t iter = 0;

double size;
FILE *fp;

/* Starting point */

gsl_vector *x = gsl_vector_alloc (32);
gsl_vector_set (x, 0, 0*b);
gsl_vector_set (x, 1, 1*b);
gsl_vector_set (x, 2, 2*b+d);
gsl_vector_set (x, 3, 3*b);
gsl_vector_set (x, 4, 4*b+3*d);
gsl_vector_set (x, 5, 5*b);
gsl_vector_set (x, 6, 6*b);
gsl_vector_set (x, 7, 7*b-d);
gsl_vector_set (x, 8, 8*b);
gsl_vector_set (x, 9, 9*b);
gsl_vector_set (x, 10, 10*b);
gsl_vector_set (x, 11, 11*b);
gsl_vector_set (x, 12, 12*b);
gsl_vector_set (x, 13, 13*b+d);
gsl_vector_set (x, 14, 14*b);
gsl_vector_set (x, 15, 15*b);
gsl_vector_set (x, 16, 16*b-2*d);
gsl_vector_set (x, 17, 17*b);
gsl_vector_set (x, 18, 18*b+4*d);
gsl_vector_set (x, 19, 19*b);
gsl_vector_set (x, 20, 20*b-d);
gsl_vector_set (x, 21, 21*b);
gsl_vector_set (x, 22, 22*b);
gsl_vector_set (x, 23, 23*b);
gsl_vector_set (x, 24, 24*b+d);
gsl_vector_set (x, 25, 25*b);
gsl_vector_set (x, 26, 26*b-2*d);
gsl_vector_set (x, 27, 27*b);
gsl_vector_set (x, 28, 28*b);
gsl_vector_set (x, 29, 29*b);
gsl_vector_set (x, 30, 30*b+d);
gsl_vector_set (x, 31, 31*b);

/* Set initial step sizes to 1 */

```

```

gsl_vector *ss = gsl_vector_alloc (32);
gsl_vector_set_all (ss, d);

/* Initialize method and iterate */

minex_func.n = 32;
minex_func.f = my_f;
minex_func.params = par;

s = gsl_multimin_fminimizer_alloc(T, 32);

gsl_multimin_fminimizer_set (s,
&minex_func, x, ss);

printf ("Passei por aqui 5");

fp=fopen("angulos.txt", "w");

do {
    iter++;
    printf ("%nTentativa %d",iter);
    status =
gsl_multimin_fminimizer_iterate(s);

    if (status)
        break;
    size = gsl_multimin_fminimizer_size (s);
    status = gsl_multimin_test_size (size, 1e-
4);

    if (status == GSL_SUCCESS) {
        printf ("converged to minimum at %n");
    }

    fprintf (fp,"Tentativa Número %5d %n
p1=%lg p2=%lg p3=%lg p4=%lg p5=%lg
p6=%lg p7=%lg p8=%lg p9=%lg p10=%lg
p11=%lg p12=%lg p13=%lg p14=%lg p15=%lg
p16=%lg p17=%lg p18=%lg p19=%lg p20=%lg
p21=%lg p22=%lg p23=%lg p24=%lg p25=%lg
p26=%lg p27=%lg p28=%lg p29=%lg p30=%lg
p31=%lg f) = %lg size = %lg %n %n",
    iter,
    gsl_vector_get (s->x, 0),

```

```

gsl_vector_get (s->x, 1),
gsl_vector_get (s->x, 2),
gsl_vector_get (s->x, 3),
gsl_vector_get (s->x, 4),
gsl_vector_get (s->x, 5),
gsl_vector_get (s->x, 6),
gsl_vector_get (s->x, 7),
gsl_vector_get (s->x, 8),
gsl_vector_get (s->x, 9),
gsl_vector_get (s->x, 10),
gsl_vector_get (s->x, 11),
gsl_vector_get (s->x, 12),
gsl_vector_get (s->x, 13),
gsl_vector_get (s->x, 14),
gsl_vector_get (s->x, 15),
gsl_vector_get (s->x, 16),
gsl_vector_get (s->x, 17),
gsl_vector_get (s->x, 18),
gsl_vector_get (s->x, 19),
gsl_vector_get (s->x, 20),
gsl_vector_get (s->x, 21),
gsl_vector_get (s->x, 22),
gsl_vector_get (s->x, 23),
gsl_vector_get (s->x, 24),
gsl_vector_get (s->x, 25),
gsl_vector_get (s->x, 26),
gsl_vector_get (s->x, 27),
gsl_vector_get (s->x, 28),
gsl_vector_get (s->x, 29),
gsl_vector_get (s->x, 30),
gsl_vector_get (s->x, 31),

```

```

s->fval, size);

```

```

printf ("Tentativa Número %5d %n
p1=%lg p2=%lg p3=%lg p4=%lg p5=%lg
p6=%lg p7=%lg p8=%lg p9=%lg p10=%lg
p11=%lg p12=%lg p13=%lg p14=%lg p15=%lg
p16=%lg p17=%lg p18=%lg p19=%lg p20=%lg
p21=%lg p22=%lg p23=%lg p24=%lg p25=%lg

```

```
p26=%lg p27=%lg p28=%lg p29=%lg p30=%lg
p31=%lg f() = %lg size = %lg ¥n¥n",
```

```
iter,
```

```
gsl_vector_get (s->x, 0),
gsl_vector_get (s->x, 1),
gsl_vector_get (s->x, 2),
gsl_vector_get (s->x, 3),
gsl_vector_get (s->x, 4),
gsl_vector_get (s->x, 5),
gsl_vector_get (s->x, 6),
gsl_vector_get (s->x, 7),
gsl_vector_get (s->x, 8),
gsl_vector_get (s->x, 9),
gsl_vector_get (s->x, 10),
gsl_vector_get (s->x, 11),
gsl_vector_get (s->x, 12),
gsl_vector_get (s->x, 13),
gsl_vector_get (s->x, 14),
gsl_vector_get (s->x, 15),
gsl_vector_get (s->x, 16),
gsl_vector_get (s->x, 17),
gsl_vector_get (s->x, 18),
gsl_vector_get (s->x, 19),
gsl_vector_get (s->x, 20),
gsl_vector_get (s->x, 21),
gsl_vector_get (s->x, 22),
gsl_vector_get (s->x, 23),
gsl_vector_get (s->x, 24),
gsl_vector_get (s->x, 25),
gsl_vector_get (s->x, 26),
gsl_vector_get (s->x, 27),
gsl_vector_get (s->x, 28),
gsl_vector_get (s->x, 29),
gsl_vector_get (s->x, 30),
gsl_vector_get (s->x, 31),
```

```
s->fval, size);
```

```
}
```

```
while (status == GSL_CONTINUE && iter
```

```
< 100);
```

```
gsl_vector_free(x);
gsl_vector_free(ss);
gsl_multimin_fminimizer_free (s);
```

```
fclose(fp);
```

```
return status;
```

```
}
```

```
BLACK_BOX
```

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include <gsl/gsl_vector.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_linalg.h>
#include <gsl/gsl_blas.h>
#include "logan.h"
```

```
#define ne 1206 /* number of
finite elements */
```

```
#define nnp 337 /* number of
nodes */
```

```
#define n_potenciais 1 /* numero
de nos com potencial conhecido */
```

```
#define n_corrente 2 /* numero
de nos com corrente volumetrica
conhecida */
```

```
#define nnp_local 4 /* number of
nodes of the triangular element */
```

```
#define n_eletrodos 32 /*
número de eletrodos*/
```

```
#define condutividade_0 1.0 /* ohm.m */
```

```
#define condutividade_1 20.0 /*
ohm.m */
```

```
#define pi 3.14159265359
```

```
/*int teste (double Indice) {*/
```

```
double my_f (gsl_vector *alpha, void
*params){

    int i,j,k,n,m,l,p,naux,s;
    int sing,signum;
    int n_padrao;
    double
aux,aux1,aux2,aux3,aux4,aux5,aux6,aux7,
aux8,s_max,beta,lambda,Indice,R;
```

```
/**/ alocao de memoria de vetores e
matrizes no numerical ***/
```

```
gsl_vector *x=gsl_vector_alloc(ne);
gsl_vector *xg=gsl_vector_alloc(ne);
gsl_vector *yg=gsl_vector_alloc(ne);
gsl_vector *zg=gsl_vector_alloc(ne);
gsl_vector *xc=gsl_vector_alloc(nnp);
gsl_vector *yc=gsl_vector_alloc(nnp);
gsl_vector *xc_g=gsl_vector_alloc(nnp);
gsl_vector *yc_g=gsl_vector_alloc(nnp);
gsl_vector *zc=gsl_vector_alloc(nnp);
gsl_vector
*condutividade=gsl_vector_alloc(ne);
gsl_vector *fonte=gsl_vector_alloc(nnp);
gsl_vector *phi=gsl_vector_alloc(nnp);
gsl_vector_int
*potenciais_conhecidos=gsl_vector_int_allo
c(n_potenciais+1);
gsl_vector
*potenciais=gsl_vector_alloc(n_potenciais+
1);
gsl_vector
*v=gsl_vector_alloc(n_eletrodos*n_eletrodo
s);
gsl_vector
*v_j=gsl_vector_alloc(n_eletrodos*n_eletr
odos);
gsl_vector
*v_j_3=gsl_vector_alloc(n_eletrodos*n_eletr
```

```
odos);
gsl_vector
*delta_p=gsl_vector_alloc(n_eletrodos);
gsl_vector
*alpha_j=gsl_vector_alloc(n_eletrodos);
gsl_vector
*psi_v=gsl_vector_alloc(n_eletrodos);
gsl_vector
*psi_S=gsl_vector_alloc(n_eletrodos);
gsl_vector
*psi_N=gsl_vector_alloc(n_eletrodos);
gsl_vector
*work=gsl_vector_alloc(n_eletrodos);
gsl_vector
*S=gsl_vector_alloc(n_eletrodos);
gsl_matrix
*V=gsl_matrix_alloc(n_eletrodos,n_eletrodo
s);
gsl_matrix
*intensidade=gsl_matrix_alloc(nnp,n_corre
nte);
gsl_matrix_int
*n_corrente_conhecida=gsl_matrix_int_allo
c(n_eletrodos,2);
gsl_matrix
*Yinv=gsl_matrix_alloc(nnp,nnp);
gsl_matrix_int
*nodes=gsl_matrix_int_alloc(ne,nnp_local);
gsl_matrix
*nlk=gsl_matrix_alloc(ne,nnp_local*nnp_lo
cal);
gsl_matrix
*theta=gsl_matrix_alloc(n_eletrodos*n_ele
trodos,n_eletrodos);
gsl_matrix
*psi=gsl_matrix_alloc(n_eletrodos,n_eletr
odos);
gsl_matrix
*gamma=gsl_matrix_calloc(n_eletrodos,n_el
etrodos*n_eletrodos);
gsl_matrix
*delta=gsl_matrix_calloc(n_eletrodos*n_ele
trodos,n_eletrodos*n_eletrodos);
gsl_matrix
*I_ne=gsl_matrix_alloc(n_eletrodos*n_eletr
```

```

odos,n_eletrodos*n_eletrodos);
gsl_matrix
*X=gsl_matrix_calloc(n_eletrodos*n_eletrodos,n_eletrodos*n_eletrodos);
gsl_matrix
*Xinv=gsl_matrix_alloc(n_eletrodos*n_eletrodos,n_eletrodos*n_eletrodos);
gsl_matrix
*B=gsl_matrix_calloc(n_eletrodos,n_eletrodos*n_eletrodos);
gsl_matrix
*U=gsl_matrix_calloc(n_eletrodos*n_eletrodos,n_eletrodos);
gsl_permutation
*t=gsl_permutation_alloc(n_eletrodos*n_eletrodos);

FILE *fp,*fp1,*fp2;

beta=pi/180;
R=300;

/** loop para gerar theta ***/

/* read nodal coordinates */

init_cd(xc,yc,zc);

for (p=1;p<=n_eletrodos;p++){

    for (i=0;i<n_eletrodos;i++){

        aux=gsl_vector_get(alpha,i);

        aux1=R*cos(aux1);
        aux2=R*sin(aux1);

        gsl_vector_set(xc,i,aux1);
        gsl_vector_set(yc,i,aux2);

    }

    printf("AQUI COMECA p=%d\n",
p);

/* deslocando os eletrodos */

aux1=gsl_vector_get(xc,p-1);
aux2=gsl_vector_get(yc,p-1);

aux3=aux1*cos(beta)-
aux2*sin(beta);
aux4=aux1*sin(beta)+aux2*cos(beta);

gsl_vector_set(xc,p-1,aux3);
gsl_vector_set(yc,p-1,aux4);

/* Vetor alpha_j */

gsl_vector
*alpha_j=gsl_vector_calloc(n_eletrodos);

for (i=0;i<n_eletrodos;i++){
    aux=gsl_vector_get(alpha,i);
    if (i==p-1){
        aux1=aux+beta;

        gsl_vector_set(alpha_j,i,aux1);
    }
    else {
        gsl_vector_set(alpha_j,i,aux);
    }
}

/** gerando a matriz psi ***/

gsl_vector
*psi_v=gsl_vector_calloc(n_eletrodos);
gsl_vector_memcpy(psi_v,alpha_j);
gsl_vector_sub(psi_v,alpha);
gsl_matrix_set_col(psi,p-1,psi_v);

/* read topology */

init_nodes(nodes);

```

```

/* read centroids */

init_centroids(xc,yc,zc,xg,yg,zg,nodes);

/* generate a tensor with all local
matrices */

init_matrizes(xc,yc,zc,nodes,nlk);

/* inicializa potenciais conhecidos */

init_potenciais(potenciais_conhecidos,potenciais);

/* inicializa corrente conhecida para um
certo padrao de corrente*/

init_corrente(n_corrente_conhecida,intensidade);

/* condutividade */

for (i=0;i<ne;i++) {

gsl_vector_set(condutividade,i,condutividade_0);
}

gsl_vector_set(condutividade,126,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,964,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,671,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,648,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,404,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,509,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,793,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,174,condutividade_1);

gsl_vector_set(condutividade,253,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,721,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,293,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,988,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,175,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,967,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,139,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,125,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,964,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,128,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,644,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,135,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,632,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,390,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,394,condutividade_1);
gsl_vector_set(condutividade,646,condutividade_1);

gsl_vector_set(condutividade,1,condutividade_0+0.01*condutividade_0);
/* fp2=fopen("graf3d.dat","w"); */

/**LOOP PADRAO**/

for
(n_padrao=0;n_padrao<n_eletrodos;n_padrao++){

/* printf
("p=%d\t n_padrao=%d\n",p,n_padrao);*/

```

```

gsl_vector *fonte=gsl_vector_calloc(nnp);

gera_fonte(n_padrao,n_corrente_conhecida,
fonte,intensidade);

/* gera matriz de "rigidez" e sua
inversa Yinv */

/* impoe potenciais conhecidos usando
tb. o vetor fonte */

calcula_Y(condutividade,
nlk,nodes,Yinv,
potenciais_conhecidos,potenciais,
fonte);

gsl_blas_dgemv
(CblasNoTrans,1.0,Yinv,fonte,0.0,phi);

if (p==0){
for (i=0;i<n_eletrodos;i++){
aux=gsl_vector_get(phi,i);
naux=i+n_eletrodos*n_padrao;
gsl_vector_set(v,naux,aux);
}
}

/* guarda vetor j */

for (i=0;i<n_eletrodos;i++){
aux=gsl_vector_get(phi,i);
naux=i+n_eletrodos*n_padrao;
gsl_vector_set(v_j,naux,aux);
}

}*/

} /* loop de cada padrao */

/* matriz theta */

/*NA VERDADE,  $k < n_{padroes}^2$ ; neste
caso,  $n_{padroes}=n_{eletrodos}$ */

if (p>0 & p!=(n_eletrodos+1)){
for (l=0;l<n_eletrodos*n_eletrodos;l++){
aux=gsl_vector_get(v_j,l);
aux1=gsl_vector_get(v,l);
if (aux1!=0){
aux2=aux-aux1;
}
if (aux1==0){
aux2=aux-aux1;
}
gsl_matrix_set (theta,l,p-1,aux2);

}
}

}/*fim do loop de p , para gerar theta*/

/** CALCULANDO A MATRIZ B **/

printf ("\\nEstou escrevendo B:");

lambda=0.000000000000000001;

/* delta=theta*theta_t */

printf ("\\nEstou escrevendo
theta*theta_transposta");
gsl_blas_dgemm (CblasNoTrans,
CblasTrans, 1.0,theta,theta,0.0,delta);

/* gamma=psi*theta_t*/

printf ("\\nEstou escrevendo
psi*theta_transposta");
gsl_blas_dgemm (CblasNoTrans,
CblasTrans, 1.0,psi,theta,0.0,gamma);

```

```

/* lambda*Ident */

printf ("¶nEstou escrevendo
lambda*Identidade");
gsl_matrix_set_identity (I_ne);
gsl_matrix_scale (I_ne,lambda);

/* Y=[delta+lambda*I] */

printf ("¶nEstou escrevendo
delta+lamda*Identidade");
gsl_matrix_add(X,delta);
gsl_matrix_add(X,I_ne);

/* Inversa de X */

printf ("¶nEstou invertendo");
gsl_linalg_LU_decomp(X,t,&s);
gsl_linalg_LU_invert(X,t,Xinv);

/* B=Gamma*X^{-1} */

gsl_blas_dgemm (CblasNoTrans,
CblasNoTrans, 1.0,gamma,Xinv,0,B);

/**** DECOMPOSIÇÃO USV DE B ****/

/*gsl_matrix_memcpy(U,B);*/

gsl_matrix_transpose_memcpy(U,B);

gsl_linalg_SV_decomp(U,V,S,work);

/**** ÍNDICE DE OBSERVABILIDADE
****/

aux1= gsl_vector_get(S,0);

aux2= gsl_vector_get(S,1);
aux3= gsl_vector_get(S,2);
aux4= gsl_vector_get(S,3);
aux5= gsl_vector_get(S,4);
aux6= gsl_vector_get(S,5);
aux7= gsl_vector_get(S,6);
aux8= gsl_vector_get(S,7);

Indice=-
(aux1+aux2+aux3+aux4+aux5+aux6+aux7);

printf ("¶nIndice=%lg¶n",Indice);

/* free memory */

gsl_vector_int_free(potenciais_conhecidos);
gsl_vector_free(potenciais);
gsl_vector_free(fonte);
gsl_vector_free(v);
gsl_vector_free(v_i_3);
gsl_vector_free(phi);
gsl_vector_free(v_j);
gsl_matrix_free(Yinv);
gsl_matrix_free(intensidade);
gsl_matrix_free(theta);
gsl_matrix_free(psi);
gsl_matrix_free(gamma);
gsl_matrix_free(delta);
gsl_matrix_free(I_ne);
gsl_matrix_free(X);
gsl_matrix_free(Xinv);
gsl_matrix_free (B);

return Indice;

}

```